

Langfristige Hausaufgaben Mathematik Klasse 10

Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

Zur Lösung einer Gleichung wenden wir schrittweise Äquivalenzumformungen an:
Man darf auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren.
Man darf auf beiden Seiten der Gleichung mit derselben Zahl (außer Null) multiplizieren oder dividieren.

Beispiel: $(x + 3)(3x - 1) - x(2x + 1) = x^2 + 4$ / Klammern auflösen
 $3x^2 - x + 9x - 3 - 2x^2 - x = x^2 + 4$ / zusammenfassen
 $x^2 + 7x - 3 = x^2 + 4$ / $-x^2$
 $7x - 3 = 4$ / $+3$
 $7x = 7$ / $:7$
 $\underline{x = 1}$
Probe: $(1 + 3)(3 - 1) - 1(2 + 1) = 1 + 4$
 $8 - 3 = 5$
 $\underline{5 = 5}$

Zur Lösung einer Ungleichung wenden wir ebenfalls Äquivalenzumformungen an:
Man darf auf beiden Seiten der Ungleichung dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren und mit derselben **positiven** Zahl multiplizieren oder dividieren
Bei der Multiplikation oder Division mit negativen Zahlen ist das Relationszeichen umzukehren. Weiterhin muss bei der Angabe der Lösungsmenge der vorgegebene Grundbereich beachtet werden.
In der schriftlichen Prüfung ist es häufig nur verlangt, von vorgegebenen Zahlen zu überprüfen, ob diese Lösungen der Ungleichung sind. Dies kann man einfach durch Einsetzen herausfinden.

Beispiel: $2x + 11 > 3(x + 1) - 1$ ($x \in \mathbf{N}$) / Klammern auflösen
 $2x + 11 > 3x + 3 - 1$ / zusammenfassen
 $2x + 11 > 3x + 2$ / -11
 $2x > 3x - 9$ / $-3x$
 $-x > -9$ / $:(-9)$
 $\underline{x < 9}$
 $L = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$

Löse folgende Gleichungen und führe eine Probe durch!

1. a) $7x - 6 = 8x - 5$
b) $7 - 8x = 6x - 35$
c) $7 + 5x = 16 + 8x$
2. a) $9(9x - 9) + 8x = 542$
b) $7(4x - 1) - 4x = -103$
c) $2(-6x - 7) = 161 - (7 - 9x)$
d) $-6(4 + 4x) = 84 - 3(6 + 2x)$
e) $-(4 + 7x) = 5(4 + x) - 48$
3. a) $13x + 5(2 - 3x) = 8(3x - 2) - 7x$
b) $8(2x - 5) + 3(2x + 3) = 6(8 - x) - 2x + 71$
c) $5(3x - 7) + 4(6 - x) = 4 + 3(x + 20) - 2x$
4. a) $(x + 4)(x + 3) = (x + 1)(x + 7)$
b) $(x + 11)(x - 9) = (x + 3)(x - 7)$
c) $(x + 4)(x - 9) - 13 = (x - 5)(x - 7)$
d) $(3x - 5)(2x + 5) = (x + 1)(6x - 4)$
5. a) $(x + 3)^2 = (x + 2)^2 + 15$
b) $(x + 3)^2 + (x - 2)^2 = (x + 4)^2 + (x - 5)^2$
c) $(x - 5)^2 + (x - 9)^2 = (x - 2)^2 + (x - 3)^2 + 3$

6. a) $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x + 14 = \frac{1}{3}x + 2 - \frac{5}{12}x$ b) $\frac{x}{5} + \frac{2x}{10} + 15 = \frac{10x}{5} + \frac{1}{5} + 10$
 c) $12\frac{3}{5}x - 11 = 31,6 + \frac{1}{20}x - 17,5$ d) $\frac{2}{3}x + 0,7 = \frac{1}{2}x - 0,05 + \frac{1}{8}x$

7. a) $\frac{7x}{2} - \frac{3x}{4} = \frac{11}{4}$ b) $\frac{3x}{5} - \frac{1}{15} = \frac{2x}{3}$ c) $\frac{10}{x} = \frac{25}{x} - 3$
 d) $\frac{20}{x} = \frac{5}{x} + 3$ e) $\frac{x-3}{x+3} = \frac{x-5}{x-2}$ f) $\frac{x+4}{x-2} = \frac{x+6}{x-1}$

8. Stelle eine Gleichung auf und löse diese!

- Die Differenz aus dem Achtfachen und dem Fünffachen einer Zahl beträgt 72. Wie heißt die Zahl?
- Die Summe dreier Zahlen ist 154. Die zweite Zahl ist um 4 größer als das Dreifache der ersten und die dritte ist um 12 kleiner als das Fünffache der ersten Zahl. Wie heißen die Zahlen?
- Die Summe von vier aufeinanderfolgenden Zahlen beträgt 178. Berechne diese Zahlen!
- Unter die Preisträger eines Wettbewerbes sollen 360 € so verteilt werden, dass der zweite Preisträger 36 € mehr erhält als der dritte und der erste 36 € mehr als der zweite. Wie viel € erhält jeder?
- Ein Rechteck ist um 8 cm länger als breit. Verlängert man die kürzere Seite um 4 cm und verkürzt gleichzeitig die längere um 3 cm, so nimmt der Flächeninhalt um 26 cm² zu. Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Rechtecks?
- Ein Rechteck ist 5 cm länger als breit. Sein Umfang beträgt 34 cm. Berechne die Seitenlängen und den Flächeninhalt.

Hinweis: Bei Sachaufgaben bietet sich eine Skizze an, um sich den Sachverhalt vorzustellen und die erforderliche Gleichung aufzustellen.

Löse folgende Ungleichungen und gib die Lösungsmenge an! Achte auf den Grundbereich!

9. a) $17y + 11 < 16y - 3$; ($y \in \mathbf{Q}$) b) $11z - 3 < 10z + 4$; ($z \in \mathbf{N}$)
 c) $0,1x - 13 \leq -10 - 0,9x$; ($x \in \mathbf{N}$) d) $34x - 7 > 24 + 33x - 25$; ($x \in \mathbf{Q}$)

10. Gegeben ist die Ungleichung

$$2x - (8 - x) < 8(2x + 3) - 5x \quad ; \quad (x \in \mathbf{R})$$

- Löse diese Ungleichung!
- L sei die Lösungsmenge der Ungleichung. Suche alle die Zahlen heraus, die zur Lösungsmenge gehören. -8 ; 3 ; 0 ; $\frac{1}{2}$; -4 ; $5,2$

11. Löse folgende Ungleichung und gib von den gegebenen Zahlen diejenigen an, die zur Lösungsmenge gehören.

$$15 - 3x > 5(x - 1) \quad ; \quad (x \in \mathbf{Q}_+)$$

$$-4,0 ; 2,5 ; \frac{27}{10} ; 0,05$$

12. Löse die gegebenen Formeln nach der jeweils angegebenen Variablen auf!

a) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ nach h b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ nach r c) $A_o = \pi r(r + s)$ nach s
 d) $A = \frac{a+c}{2}h$ nach a e) $R = \zeta \frac{1}{A}$ nach A f) $A = \frac{abc}{4r}$ nach r